Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 7

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

30 - 5 - 2012

Άσκηση 1. (1) *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$.*

Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2, \qquad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_3, \qquad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_4, \qquad f(\vec{e}_4) = \vec{e}_1$$

Να εξετάσετε αν η f είναι ισομετρία.

(2) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα $f + g$ δύο ισομετριών $f,\ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία.*

(3) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα $A+B$ ή $A+B^2$, όπου A και B είναι δύο $n \times n$ ορθογώνιοι πίνακες, είναι ορθογώνιος πίνακας.*

Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 7

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

30 - 5 - 2012

Άσκηση 1. (1) *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$.*

Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2, \qquad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_3, \qquad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_4, \qquad f(\vec{e}_4) = \vec{e}_1$$

Να εξετάσετε αν η f είναι ισομετρία.

(2) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα $f + g$ δύο ισομετριών $f, \ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία.*

(3) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα $A+B$ ή $A+B^2$, όπου A και B είναι δύο $n\times n$ ορθογώνιοι πίνακες, είναι ορθογώνιος πίνακας.*

Λύση. (1) *Έστω τυχόν διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε το $\vec{x}$ γράφεται μοναδικά*

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \lambda_4\vec{e}_4, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$$

ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$.

Τότε, χρησιμοποιώντας ότι η βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθοκανονική, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|f(\vec{x})\| &= \|f(\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \lambda_4\vec{e}_4)\| \\
&= \|\lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(\vec{e}_2) + \lambda_3 f(\vec{e}_3) + \lambda_4 f(\vec{e}_4)\| \\
&= \|-\lambda_1\vec{e}_2 - \lambda_2\vec{e}_3 - \lambda_3\vec{e}_4 + \lambda_4\vec{e}_1\| \\
&= \sqrt{(-\lambda_1)^2 + (-\lambda_2)^2 + (-\lambda_3)^2 + \lambda_4^2} \qquad \mathcal{B} : \text{ΟΚΒ} \\
&= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2} \\
&= \|\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \lambda_4\vec{e}_4\| \\
&= \|\vec{x}\|
\end{aligned}$$

Επομένως η f είναι ισομετρία.

<u>Δεύτερος Τρόπος</u>: Γνωρίζουμε από τη Θεωρία ότι μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία αν και μόνο αν ο πίνακας της f σε ΟΚΒ είναι ορθογώνιος. Ο πίνακας

της f ως προς την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Εξετάζουμε αν ο πίνακας A είναι ορθογώνιος, δηλαδή αν ${}^tA \cdot A = I_4$. Έχουμε:

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Συνεπώς η f είναι ισομετρία.

(2) Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια ισομετρία. Τότε η γραμμική απεικόνιση $-f$ είναι ισομετρία διότι:

$$\|(-f)(\vec{x})\| = \|-f(\vec{x})\| = |-1| \cdot \|f(\vec{x})\| = \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|, \qquad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

Όμως το άθροισμα $f + (-f) = \mathbf{0}$ είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση η οποία προφανώς δεν είναι ισομετρία.

Διαφορετικά: Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}(x) = x, \forall x \in \mathcal{E}$, η οποία προφανώς είναι ισομετρία, και έστω $f = g = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Τότε οι f, g είναι ισομετρίες, αλλά το άθροισμα $f + g$ δεν είναι ισομετρία διότι

$$\|(f+g)(\vec{x})\| = \|f(\vec{x}) + g(\vec{x})\| = \|\vec{x} + \vec{x}\| = \|2\vec{x}\| = 2\|\vec{x}\|$$

και για $\vec{x} \neq \vec{0}$: $2\|\vec{x}\| \neq \|\vec{x}\|$.

Άρα γενικά το άθροισμα $f + g$ δύο ισομετριών $f,\ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ΔΕΝ είναι ισομετρία.

(3) Έστω A ένας $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας. Τότε και ο πίνακας $-A$ είναι ορθογώνιος αλλά το άθροισμα $A + (-A) = \mathbb{O}$ είναι ο μηδενικός πίνακας που φυσικά δεν είναι ορθογώνιος.

Θεωρούμε τους ορθογώνιους πίνακες

$$B = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε ο πίνακας

$$A + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν είναι προφανώς ορθογώνιος.

Διαφορετικά: Έστω A, αντίστοιχα B, οι ορθογώνιοι πίνακες μιας ισομετρίας f, αντίστοιχα g, σε ορθοκανονική βάση. Τότε ο πίνακας $A + B$ είναι ο πίνακας της $f + g$. Όμως δείξαμε παραπάνω ότι γενικά το άθροισμα δυο ισομετριών δεν είναι ισομετρία. Άρα ο πίνακας $A + B$ δεν είναι ορθογώνιος.

Άρα γενικά το άθροισμα $A + B$, όπου A και B είναι δύο $n \times n$ ορθογώνιοι πίνακες, ΔΕΝ είναι ορθογώνιος πίνακας. $\square$